Efectos de la dispersión espacial en las Fuerzas de Casimir

Ana María Contreras Reyes

Universidad de las Américas - Puebla

Director de tesis: Dr. W. Luis Mochán Backal

Centro de Ciencias Físicas

Universidad Nacional Autónoma de México

Otoño 2003

Efecto Casimir

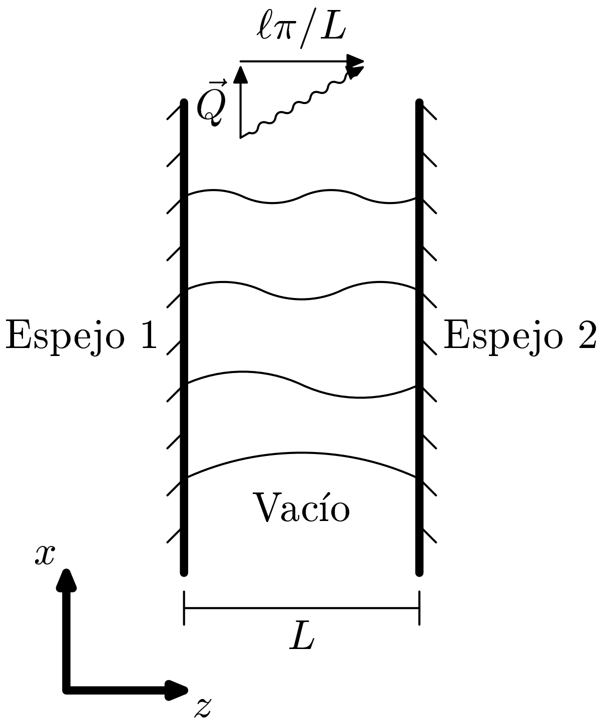


Figura 1: Espejos perfectos separados una distancia L. Se muestran los primeros modos electromagéticos de la cavidad, caracterizados por osciladores en la dirección perpendicular a los espejos.

- *Primera Cuantización:*

  Campo $\propto \sin(kz)$

  Número de onda k es un miembro del conjunto $\{k_l\}$, con

$$k_l = \frac{l\pi}{L}, \qquad l \in 1, 2, 3, ... \tag{1}$$

  Longitud de onda λ es un submúltiplo entero de $2L$.

Cada componente independiente del campo ϕ, obedece

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0, \tag{2}$$

la cual se convierte en

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi_{k_l} = -k_l^2 c^2 \phi_{k_l} \tag{3}$$

para cada número de onda k_l.

$l \rightarrow l$-ésimo oscilador

$$\omega_l = k_l c. \tag{4}$$

- *Segunda cuantización*

  Eigen-energía para cada oscilador

$$E_{n_l} = \left(n_l + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_l, \tag{5}$$

  $n_l = 0, 1, 2, ...$: número cuántico que describe el estado del l-ésimo oscilador.

  ¿1/2 constante aditiva?

¿Qué pasaría si L variara lentamente?

$$U = \frac{\pi \hbar c}{L} \sum_l \left(n_l + \frac{1}{2} \right) l, \tag{6}$$

Trabajo para mover los espejos

$$F_e dL = dW = dU, \tag{7}$$

$\rightarrow$ Es necesario vencer una fuerza $F = -F_e$.

Interacción entre conductores perfectos

Energía del estado base

$$U = \frac{\pi\hbar c}{2L}\sum_{l=1}^{\infty} l. \tag{8}$$

- *catástrofe ultravioleta.*
- Transparencia de metales.
- Regularización

$$F = -\frac{\pi\hbar c}{12L^2}. \tag{9}$$

Fuerza de Casimir en materiales reales

- Transparencia de metales.
- Materiales absorbentes.
- No existe formalismo hamiltoniano completo en caso de disipación.
- Reciente deducción de la fuerza de Casimir para materiales arbitrarios (amplitudes de reflexión).

Fuerza de Casimir en materiales arbitrarios

Sistema Real

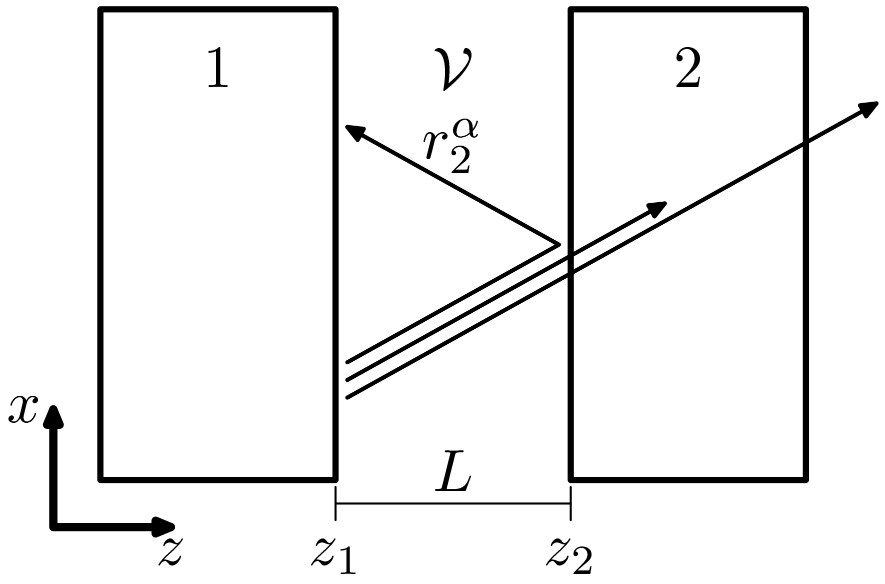


Figura 2: Placas arbitrarias $\alpha = 1, 2$ con superficies en z_1 y z_2 separadas por una cavidad vacía $\mathcal{V}$ y con amplitudes de reflexión r_a^α. Se ilustran fotones reflejados, absorbidos y transmitidos.

Sistema Ficticio

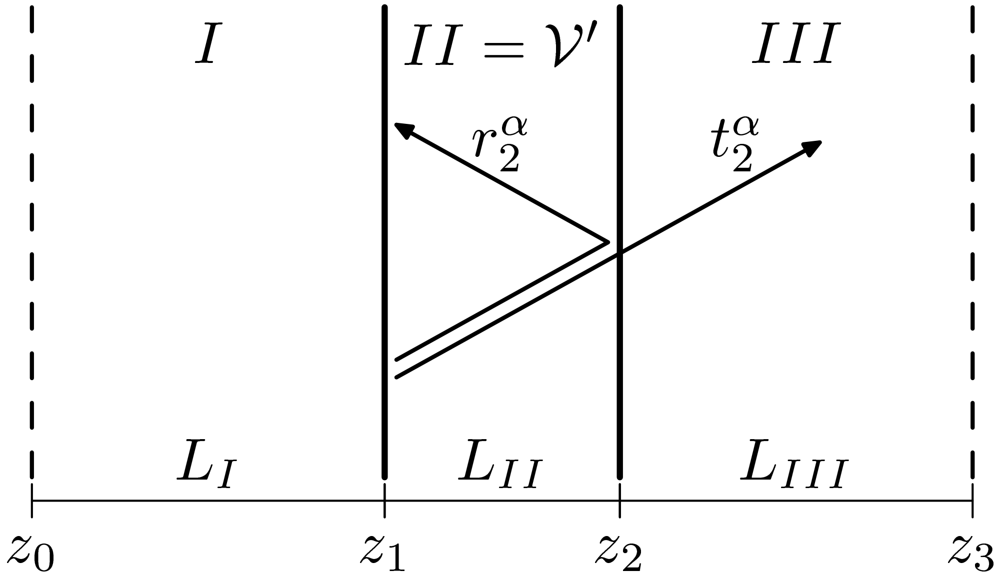


Figura 3: Placas ficticias infinitesimales con las *mismas* r_a^α que el sistema real y con t_a^α tal que se conserve la energía. Las tres regiones son vacías.

Cálculo de la Fuerza de Casimir

- Considere una onda con polarización s, frecuencia ω y vector de onda $\vec{Q}$ a lo largo de la interface.

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_o e^{i(Qx-\omega t)}\phi(z), \tag{10}$$

  con $\vec{\mathcal{E}}_o = (0, \mathcal{E}_o, 0)$.

- La *función de onda*

$$\phi(z) = \alpha_r e^{ikz} + \beta_r e^{-ikz}, \tag{11}$$

  obedece la ecuación de Helmholtz en cada región vacía.

- Condición de normalización

$$\int_{S'} dz\, |\phi(z)|^2 = 1 \tag{12}$$

- Componentes del campo magnético

$$B_x(t,\vec{r}) = i\frac{\mathcal{E}_o}{q}e^{i(Qx-\omega t)}\frac{\partial\phi(z)}{\partial z} \tag{13}$$

$$B_z(t,\vec{r}) = \frac{Q}{q}\mathcal{E}_o e^{i(Qx-\omega t)}\phi(z). \tag{14}$$

con número de onda

$$q = \sqrt{k^2 + Q^2} = \frac{\omega}{c} \tag{15}$$

- Densidad de energía

$$u = \frac{|E|^2 + |B|^2}{16\pi} \tag{16}$$

- Energía electromagnética en S'

$$U = \frac{A}{8\pi}\left|\mathcal{E}_o\right|^2. \tag{17}$$

- Tensor de Esfuerzos

$$
\begin{aligned}
T_{zz} &= \frac{1}{8\pi}\mathrm{Re}[E_z E_z^* + B_z B_z^* - \frac{1}{2}(|E|^2 + |B|^2)] \\
-T_{zz} &= \frac{\mathcal{E}_o^2}{16\pi}\left[\frac{k^2}{q^2}|\phi(z)|^2 + \frac{1}{q^2}|\partial_z\phi(z)|^2\right].
\end{aligned} \tag{18}
$$

- En términos de la energía,

$$
-T_{zz} = \left(\frac{k^2}{q^2}|\phi(z)|^2 + \frac{1}{q^2}|\partial_z\phi(z)|^2\right)\frac{U}{2A}, \tag{19}
$$

para un solo modo electromagnético

- En términos del número de fotones

$$
\begin{aligned}
-T_{zz} &= \frac{1}{2A}\sum_n\left(\frac{k_n^2}{q_n^2}|\phi_n(z)|^2 + \frac{1}{q_n^2}|\partial_z\phi_n(z)|^2\right) \\
&\times \left(N_n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_n.
\end{aligned} \tag{20}
$$

- *Densidad local de estados*

$$\rho_{k^2} = -\frac{1}{2\pi}\left(\mathrm{Im}\, G_{\tilde{k}^2}(z,z') + \frac{1}{k^2}\partial_z\partial_{z'}\mathrm{Im}\, G_{\tilde{k}^2}(z,z')\right)_{z'\to z}, \quad (21)$$

donde

$$G_{\tilde{k}^2}(z,z') \equiv \sum_n \frac{\phi_n(z)\phi_n^*(z')}{\tilde{k}^2 - k_n^2} \quad (22)$$

es la función de Green para la ecuación de Helmholtz en una dimensión, obedeciendo

$$(\tilde{k}^2 + \partial_z^2)G_{\tilde{k}^2}(z,z') = \delta(z-z'), \quad (23)$$

y las condiciones de frontera adecuadas.

- Número de onda complejo

$$\tilde{k} = k + i\eta \qquad (\eta > 0), \quad (24)$$

con el límite cuando $\eta \to 0^+$.

- Tensor de esfuerzos

$$-T_{zz} = \frac{\hbar c}{A} \int dk^2 f \frac{k^2}{q} \rho_{k^2}, \tag{25}$$

donde

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega}{2}\right) && (26) \\ f(\omega_n) &= N_n + 1/2 && (27) \end{aligned}$$

es el número de ocupación en equilibrio de un estado de frecuencia ω a la temperatura $T = 1/(k_B \beta)$, k_B es la constante de Boltzmann.

En el estado base $T = 0$, por lo que $f = 1/2$.

Podemos reescribir la función de Green dentro de la cavidad (1D),

$$
\begin{aligned}
G(z, z') &= \frac{1}{W}[\phi_<(z')\phi_>(z)\theta(z - z') \\
&+ \phi_>(z')\phi_<(z)\theta(z' - z)],
\end{aligned} \tag{28}
$$

donde

$$W = \phi_<(z')\phi'_>(z') - \phi_>(z')\phi'_<(z') \tag{29}$$

es el Wronskiano, y

$$\phi_<(z) = e^{-i\tilde{k}(z-z_1)} + r_1^s e^{i\tilde{k}(z-z_1)} \tag{30}$$

$$\phi_>(z) = e^{i\tilde{k}(z-z_2)} + r_2^s e^{-i\tilde{k}(z-z_2)} \tag{31}$$

son las soluciones de la ec. de onda 1D obedeciendo condiciones de contorno.

- En términos de la *densidad de estados local*

$$T_{zz} = \frac{\hbar c}{\pi A} \int dk f \frac{k^3}{q} \mathrm{Re}\left[\frac{1 + r_1^s r_2^s e^{2i\tilde{k}L}}{\tilde{k}(1 - r_1^s r_2^s e^{2i\tilde{k}L})} \right]. \tag{32}$$

- Polización p, reemplazamos $\vec{E} \to \vec{B}$, $\vec{B} \to -\vec{E}$ y $r_a^s \to r_a^p$.

- Tensor de esfuerzos total

$$- \quad T_{zz} = \frac{\hbar c}{4\pi^3} \int d^2Q \int dk f \frac{k^3}{q} \tag{33}$$

$$\times \mathrm{Re}\left[\frac{1 + r_1^s r_2^s e^{2i\tilde{k}L}}{\tilde{k}(1 - r_1^s r_2^s e^{2i\tilde{k}L})} + \frac{1 + r_1^p r_2^p e^{2i\tilde{k}L}}{\tilde{k}(1 - r_1^p r_2^p e^{2i\tilde{k}L})} \right],$$

Flujo de ímpetu

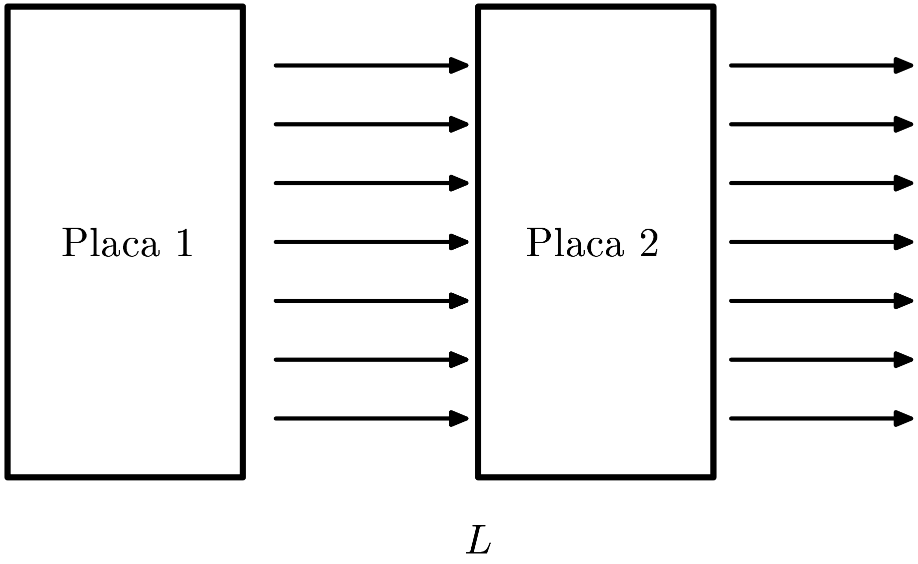


Figura 4: Se muestra el flujo de ímpetu que va de la placa 1 a la 2 y de la 2 al infinito. Para encontrar la fuerza sobre la placa 2 es necesario restar la contribución del flujo de ímpetu más allá de las placas.

Restando el flujo de ímpetu que va de dicha placa al infinito,

$$\begin{aligned}\frac{F_z}{A} &= \frac{\hbar c}{2\pi^3}\int d^2Q \int dk\, f\, \frac{k^3}{q} \\ &\quad \times \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\tilde{k}(\xi^s-1)}+\frac{1}{\tilde{k}(\xi^p-1)}\right],\end{aligned} \tag{34}$$

donde

$$\xi^\alpha \equiv \left(r_1^\alpha r_2^\alpha e^{2i\tilde{k}L}\right)^{-1}. \tag{35}$$

- Problema físico:
  - ω, q, Q real y positiva
  - k puede ser complejo (ondas evanescentes)

  $k = iQ \to 0 \to \infty$.
- Funciones oscilantes $\to$ Técnicas de variable compleja
  - No hay polos

$$r_1^\alpha \sum_n \left(r_1^\alpha r_2^\alpha e^{2ikL}\right)^n = \frac{r_1^\alpha}{1 - r_1^\alpha r_2^\alpha e^{2ikL}}$$

  - $e^{2ikL} = e^{2ik'L} e^{-2k''L}$
  - $k = iQ$ hasta $i\infty \to q$ imaginaria

Límites de integración

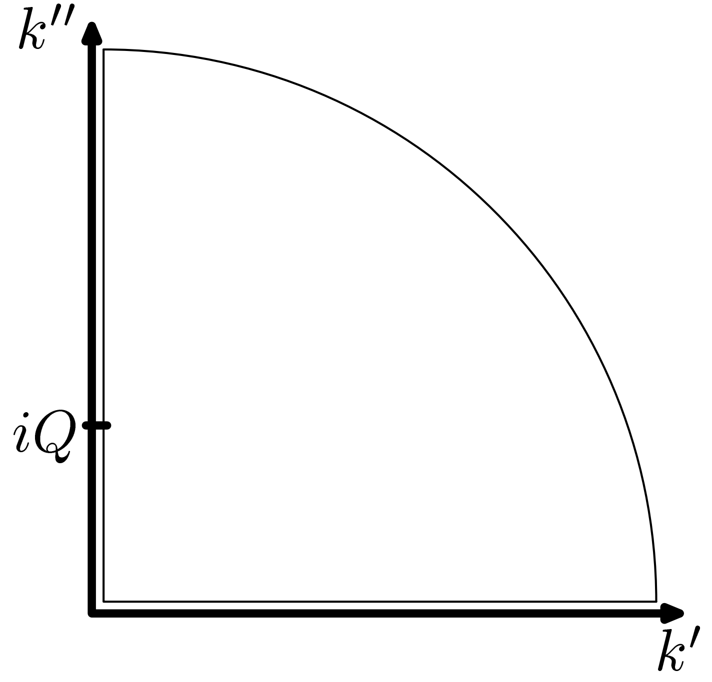


Figura 5: Diagrama en el que se ilustra el camino de integración sobre el plano complejo.

Reflectividad

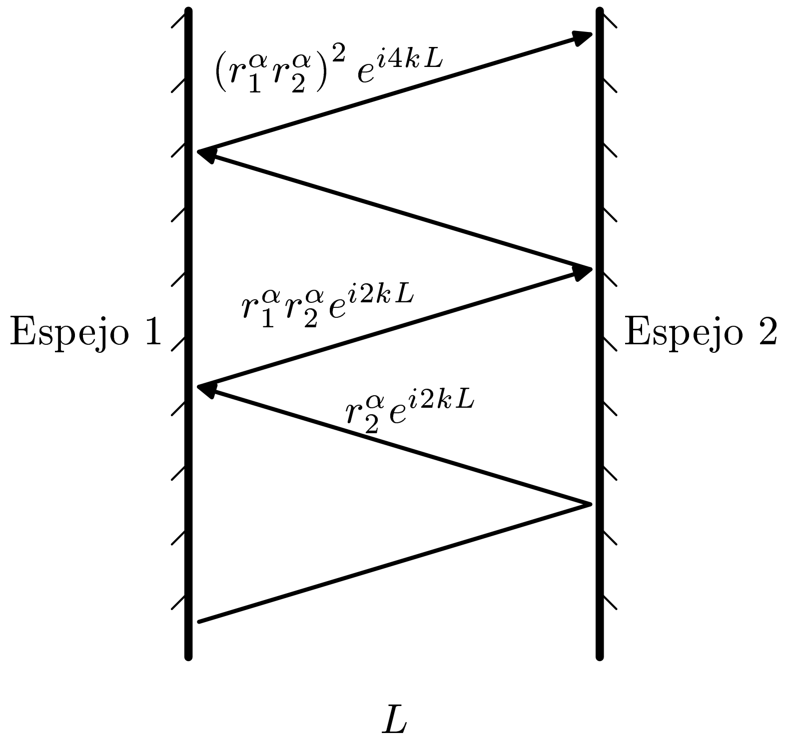


Figura 6: Espejos separados una distancia L. Un fotón es reflejado infinitamente en la cavidad que éstos forman. Mostramos que no es posible que hayan polos en la expresión de la fuerza.

Modelo de Drude

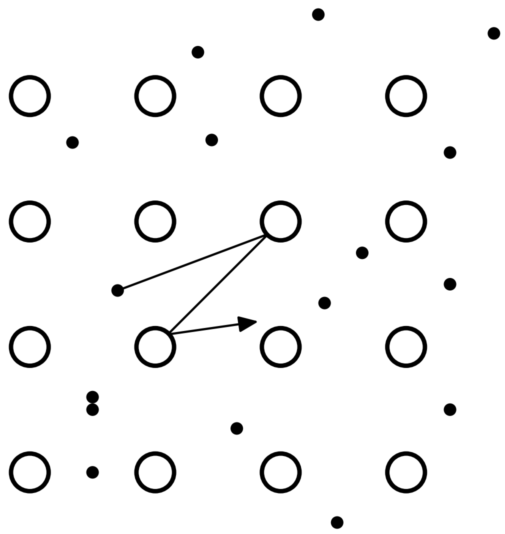


Figura 7: El metal es un gas de electrones con fondo positivo inmóvil. No hay interacción entre dichas partículas.

Modelo hidrodinámico

$$\Delta F_x = [P(x) - P(x+\Delta x)]\Delta y \Delta z \tag{36}$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial x}\Delta V. \tag{37}$$

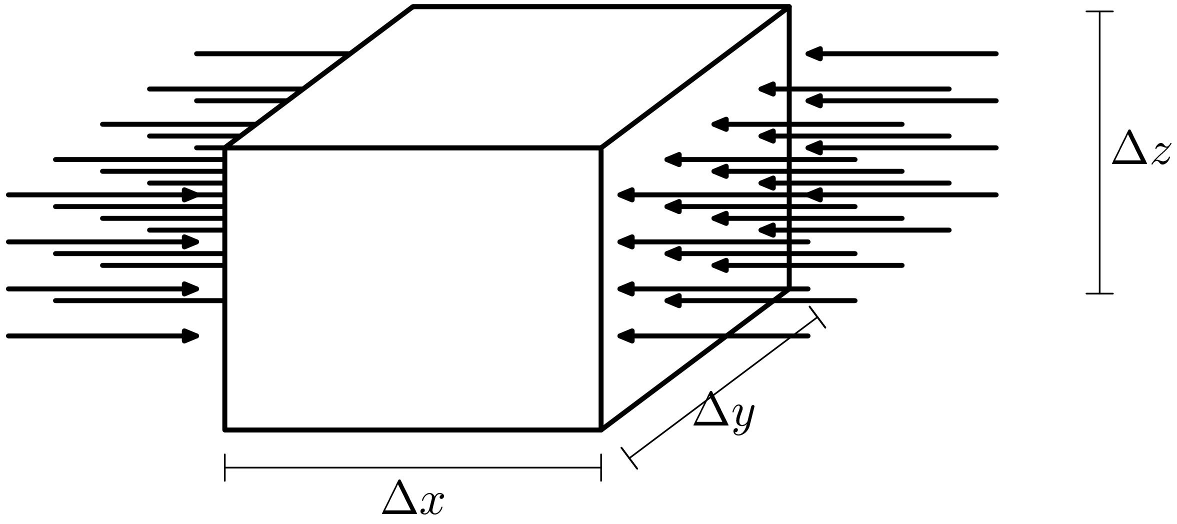
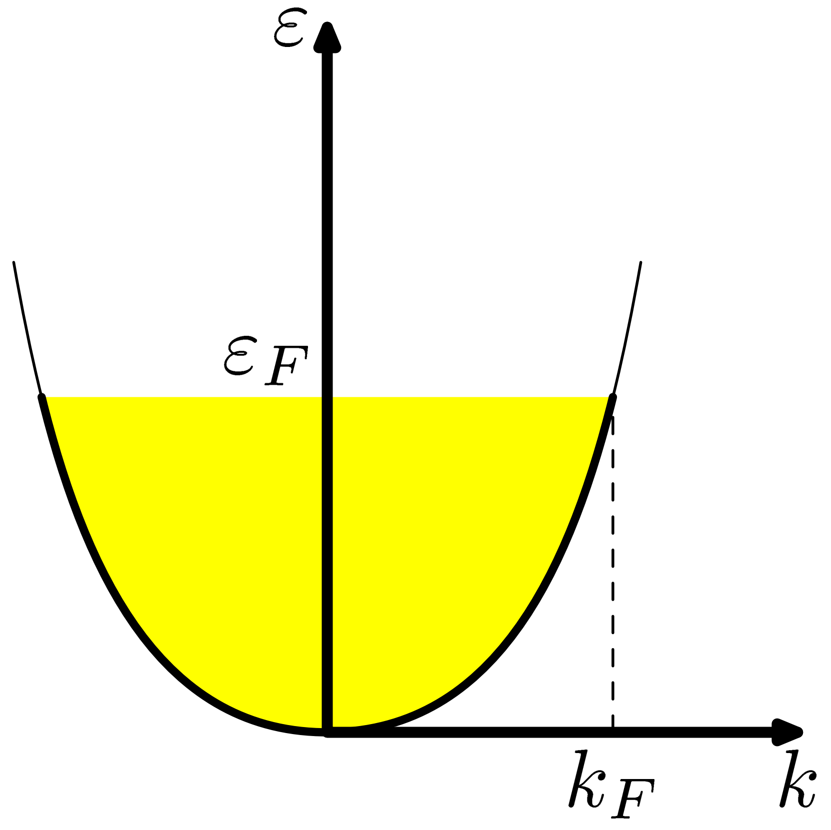


Figura 8: Se ilustra lo que sucede en el gas de electrones.

Energía de Fermi



- Energía del gas de fermiones

$$E = \frac{3}{5} N \varepsilon_F, \tag{38}$$

donde $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2$ es la energía de Fermi, $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$ es el vector de onda de Fermi y $n = N/V$ es la densidad electrónica.

- Presión de un gas

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_N . \tag{39}$$

$\Rightarrow$

$$P = \frac{2}{3}\frac{E}{V} = \frac{1}{3} m v_F^2 \nabla n \tag{40}$$

- Cambio de la presión en el gas de electrones con respecto a la densidad electrónica

$$\nabla P = \frac{2}{3}\varepsilon_F \nabla n. \tag{41}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{n}\frac{\Delta F}{\Delta V} = -\frac{\nabla P}{n} = -\frac{1}{3}mv_F^2\frac{\nabla n}{n}. \tag{42}$$

Definiendo

$$\beta^2 = \frac{1}{3}mv_F^2, \tag{43}$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla P}{n} = m\beta^2\frac{\nabla n}{n}. \tag{44}$$

- Segunda Ley de Newton

$$m\ddot{x} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\dot{x} - \frac{\nabla P}{n}, \tag{45}$$

Plasmones

Figura 9: Se ilustra una oscilación de plasma.

- Densidad de carga es

$$\rho = (n_0 - n)e \quad \Rightarrow \quad \nabla\rho = -e\nabla n \tag{46}$$

- Densidad de corriente electrónica

$$\vec{j} = -ne\dot{x} = -i\omega\vec{P} \tag{47}$$

- Ecuación de Continuidad, ondas monocromáticas

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -i\omega\rho = -\nabla\cdot\vec{j} = i\omega\nabla\cdot\vec{P} \tag{48}$$

$\Rightarrow$

$$\rho = -\nabla\cdot\vec{P} = -i\vec{q}\cdot\vec{P} \tag{49}$$

- Frecuencia de plasma

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}, \tag{50}$$

Finalmente,

$$(\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau})\vec{P} - \beta^2 \vec{q}\,\vec{q} \cdot \vec{P} = -\frac{\omega_p^2}{4\pi}\vec{E}. \tag{51}$$

- Campo Longitudinal $\quad \vec{E}^L \| \vec{P}^L \| \vec{q} \quad \Rightarrow \quad \vec{q}\,\vec{q} \to q^2$

$$\vec{P^L} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} - \beta^2 q^2}\vec{E^L}, \tag{52}$$

- Campo Transversal $\quad \vec{E}^T \| \vec{P}^T \perp \vec{q} \quad \Rightarrow \quad \vec{q} \cdot \vec{P}^T = 0$

$$\vec{P^T} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau}}\vec{E^T}, \tag{53}$$

- Desplazamiento Eléctrico $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$

  - $\vec{D}^T(\vec{q},\omega) = \epsilon^T(\vec{q},\omega)\vec{E}^T(\vec{q},\omega)$

$$\epsilon^T(\vec{q},\omega) = 1 - \frac{\omega_p}{\omega^2 + i\omega/\tau}. \tag{54}$$

  - $\vec{D}^L(\vec{q},\omega) = \epsilon^L(\vec{q},\omega)\vec{E}^L(\vec{q},\omega)$

$$\epsilon^L(\vec{q},\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} - \beta^2 q^2} \tag{55}$$

Consecuencias de la dispersión espacial.

Apantallamiento electrónico

Potencial eléctrico

$$\varphi(\vec{q},0) = \frac{\varphi^{ext}(\vec{q},0)}{\epsilon^L(\vec{q},0)} = \frac{4\pi Q}{\epsilon^L(q,0)q^2} \tag{56}$$

- Límite estático

$$\varphi(\vec{r},\omega) = \frac{Q}{r}e^{-\omega_p r/\beta} = \frac{Q}{r}e^{-k_{TF}r} \tag{57}$$

- Distancias pequeñas : $\varphi(\vec{r},\omega) = Q/r = \varphi^{\text{ext}}(\vec{r},\omega)$
- Distancias grandes:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega,\vec{r}) &= \frac{Q}{r}\frac{\omega^2 + i\omega/\tau}{\omega^2 + i\omega/\tau - \omega_p^2)} && (58) \\ &= \phi^{\text{ext}}(\vec{r},\omega)/\epsilon^L(\vec{q}=0,\omega). && (59) \end{aligned}$$

- Ondas de plasma $\omega^2 > \omega_p^2$

Ecuaciones de Fresnel

- Ley de Faraday

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c}\vec{B} \quad \Rightarrow \quad B_x = -\frac{c}{\omega}k_z E_y \tag{60}$$

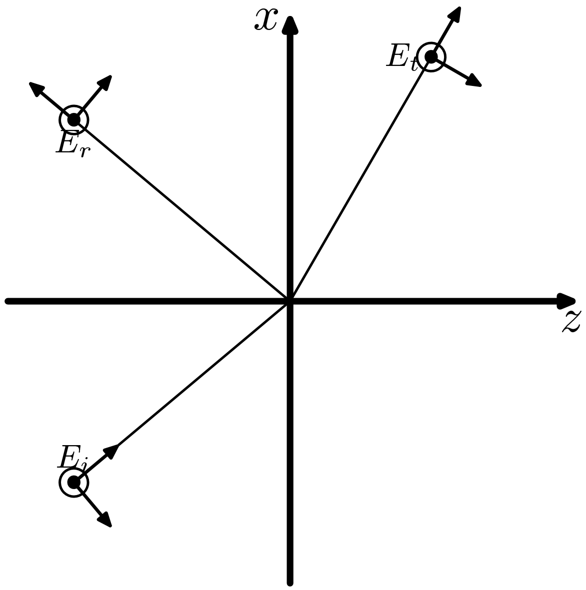
- Ley de Ampere

$$\vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c}\vec{D} \quad \Rightarrow \quad D_x = \frac{c}{\omega}k_z B_y \tag{61}$$

Polarización s

$$E_y(z) = E_i e^{iqz} + E_r e^{-iqz} \quad (z < 0) \tag{62}$$

$$E_y(z) = E_t e^{ikz} \quad (z > 0) \tag{63}$$



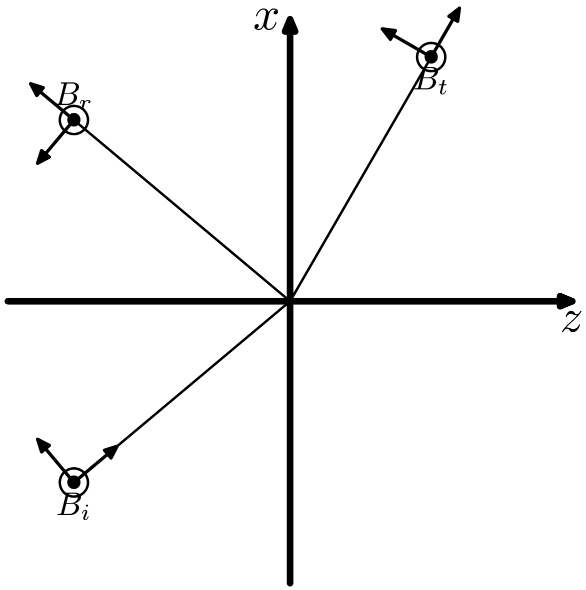
$q^2 = \omega^2/c^2 - Q^2,$
$k^2 = \epsilon\omega^2/c^2 - Q^2,$
+ condiciones de contorno

$$\begin{aligned} r_s &\equiv \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_s^m - Z_s^v}{Z_s^m - Z_s^v} \\ &= \frac{q-k}{q+k}. \end{aligned} \tag{64}$$

Polarización p

$$B_y(z) = B_i e^{iqz} + B_r e^{-iqz} \quad (z < 0) \tag{65}$$

$$B_y(z) = B_t e^{ikz} \quad (z > 0) \tag{66}$$



$$r_s \equiv \frac{B_r}{B_i} = \frac{Z_p^v - Z_p^m}{Z_p^v - Z_p^m} = \frac{\epsilon q - k}{\epsilon q + k} \tag{67}$$

Inclusión de plasmones

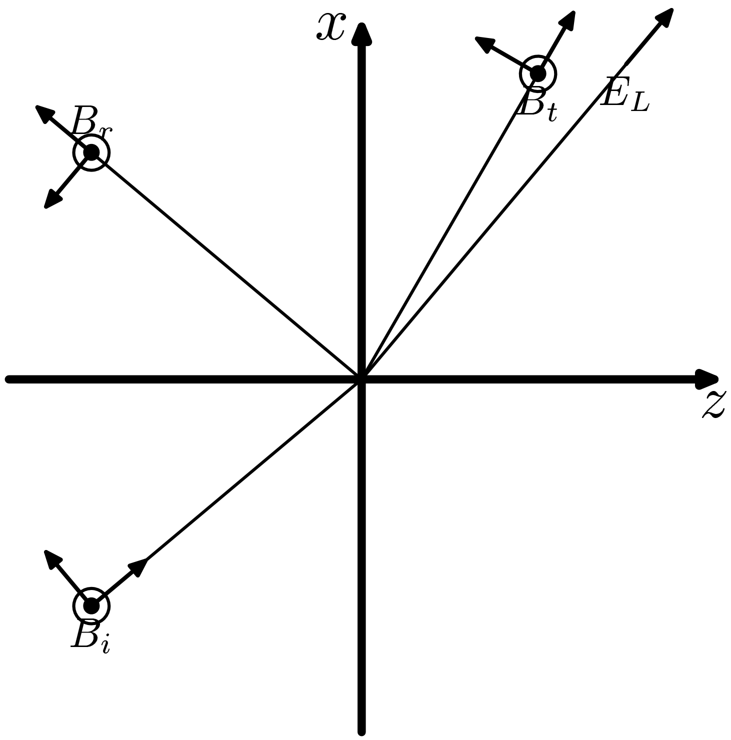


Figura 10: Un fotón con polarización P genera una onda transversal (T) y otra longitudinal L transmitida, además de una onda reflejada r

- Condición Adicional a la Frontera: $E_\perp$ es continuo

$$E_x(0^+) = \frac{kc}{\omega\epsilon^T(\omega)}B_t - iQ\phi \tag{68}$$

$$E_z(0^+) = -\frac{Qc}{\omega\epsilon^T(\omega)}B_t - il\phi \tag{69}$$

$$E_z(0^-) = -\frac{Qc}{\omega}B_t \tag{70}$$

- Impedancia Superficial del medio

$$Z_p^m = \frac{kc}{\omega\epsilon^T(\omega)}\left(1-\frac{Q^2}{kl}\right)(\epsilon^T(\omega)-1). \tag{71}$$

- Coeficiente de Reflexión

$$r_p = \frac{\epsilon^T q - k + Q^2(\epsilon^T-1)/l}{\epsilon^T q + k - Q^2(\epsilon^T-1)/l}. \tag{72}$$

Últimos Cálculos

- Caso unidimensional $\quad \int QdQ \to 2\pi/A$

$$Q^2 - \kappa^2 = q^2 < 0 \Rightarrow q = iu \tag{73}$$

$$QdQ - \kappa d\kappa = qdq, \tag{74}$$

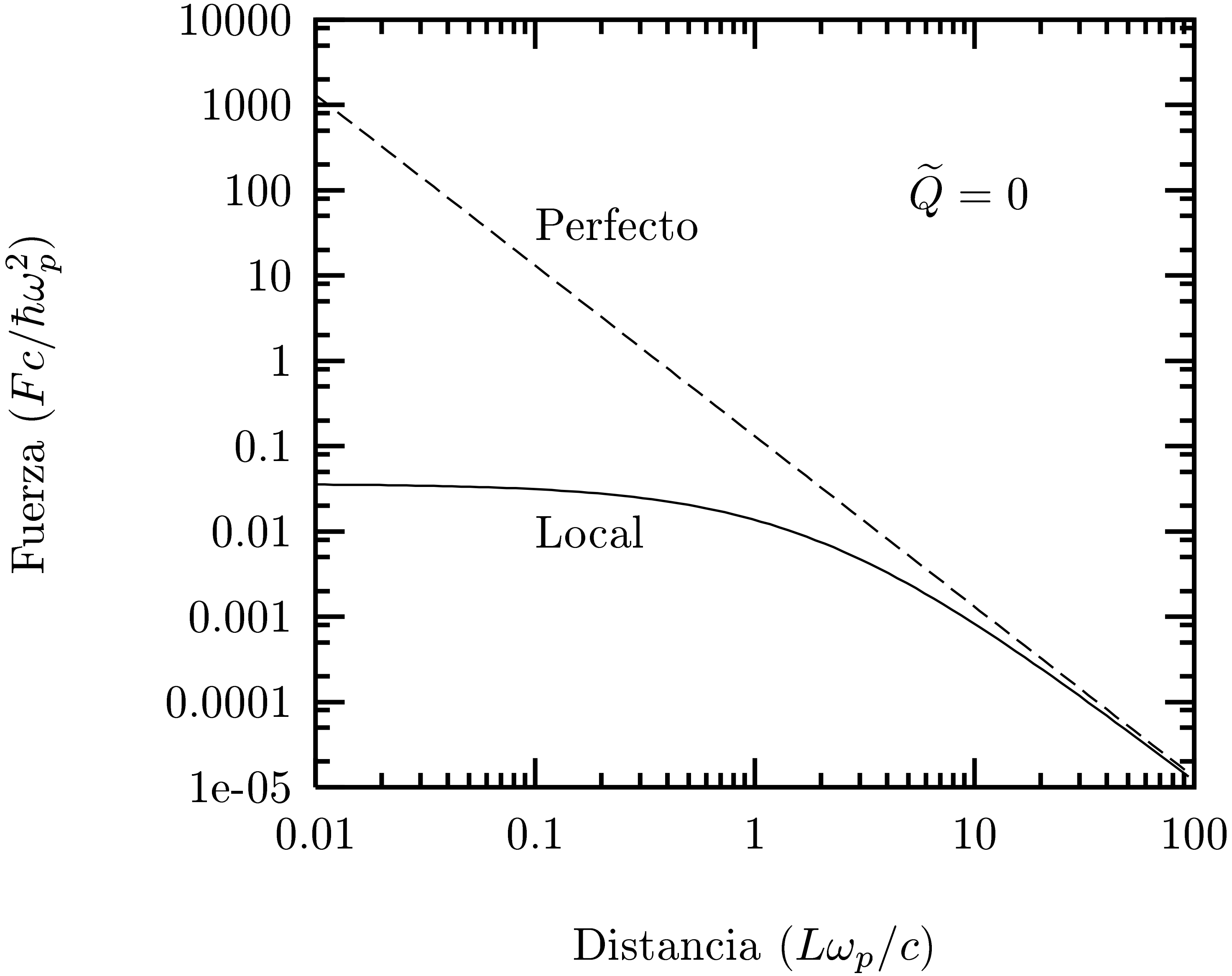
y para $\vec{Q}$ fija

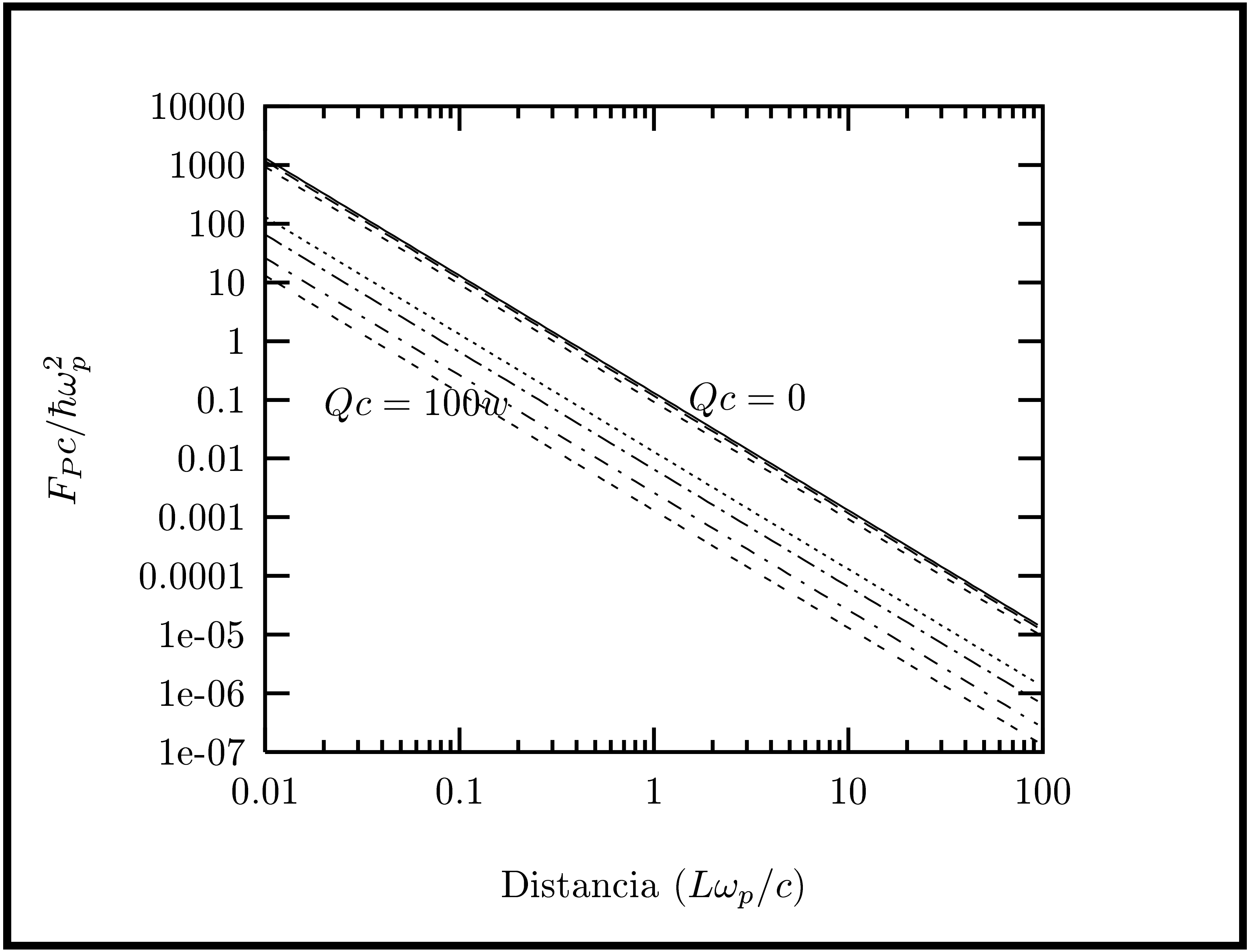
$$qdq = -\kappa d\kappa \Rightarrow udu = \kappa d\kappa \tag{75}$$

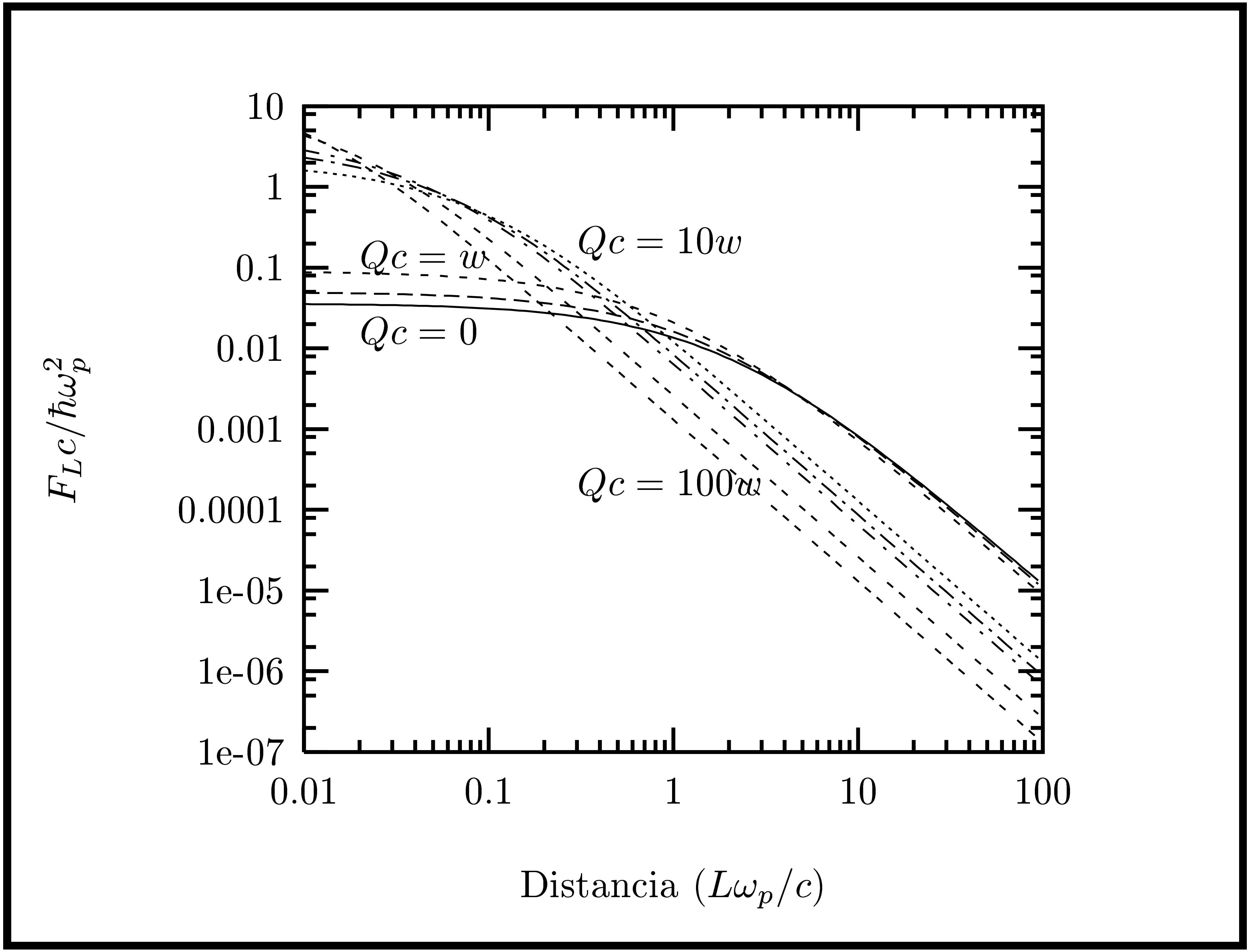
$$\omega = qc = iw \Rightarrow du = dw/c \tag{76}$$

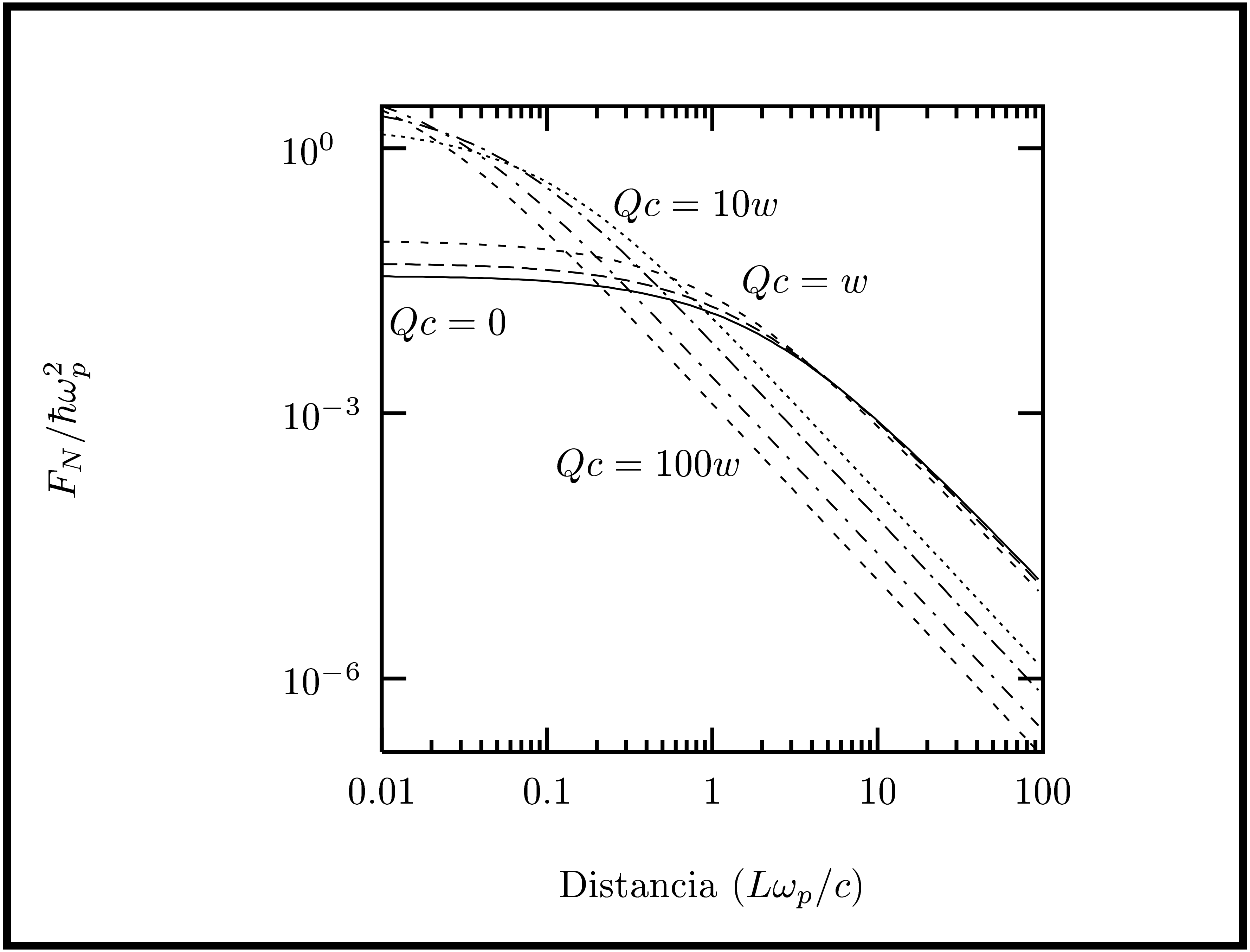
$$F_z = -\frac{\hbar}{\pi}\int_0^{\infty} dw \frac{\sqrt{Q^2 + w^2/c^2}}{\xi^p - 1}, \tag{77}$$

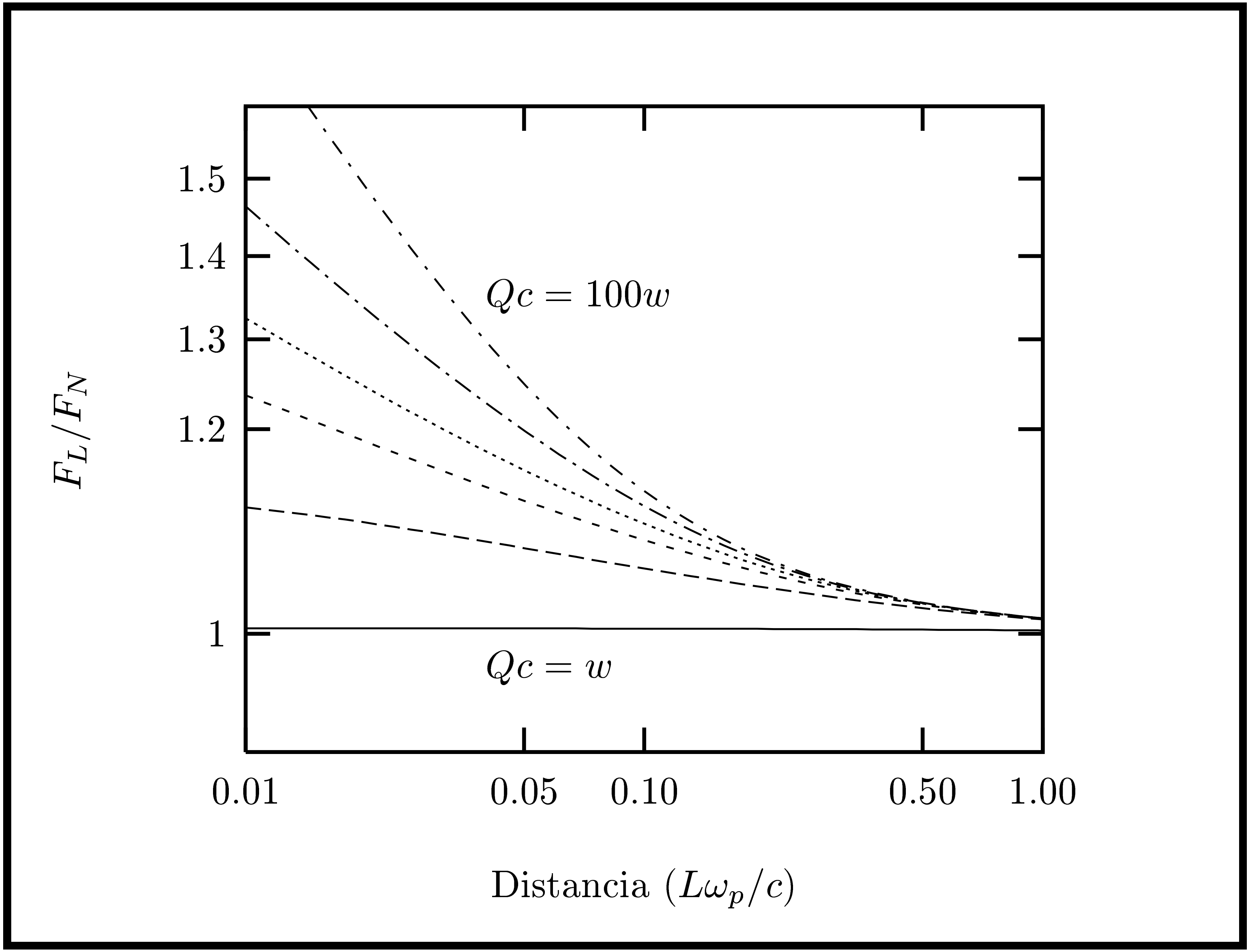
donde $\xi^p = e^{2L\sqrt{Q^2+w^2/c^2}}/(r_1^p r_2^p)$


10000
1000
100
10
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
1e-05
0.01
0.1
1
10
100
Fuerza $(Fc/\hbar\omega_p^2)$
Distancia $(L\omega_p/c)$
Perfecto
Local
$\tilde{Q} = 0$

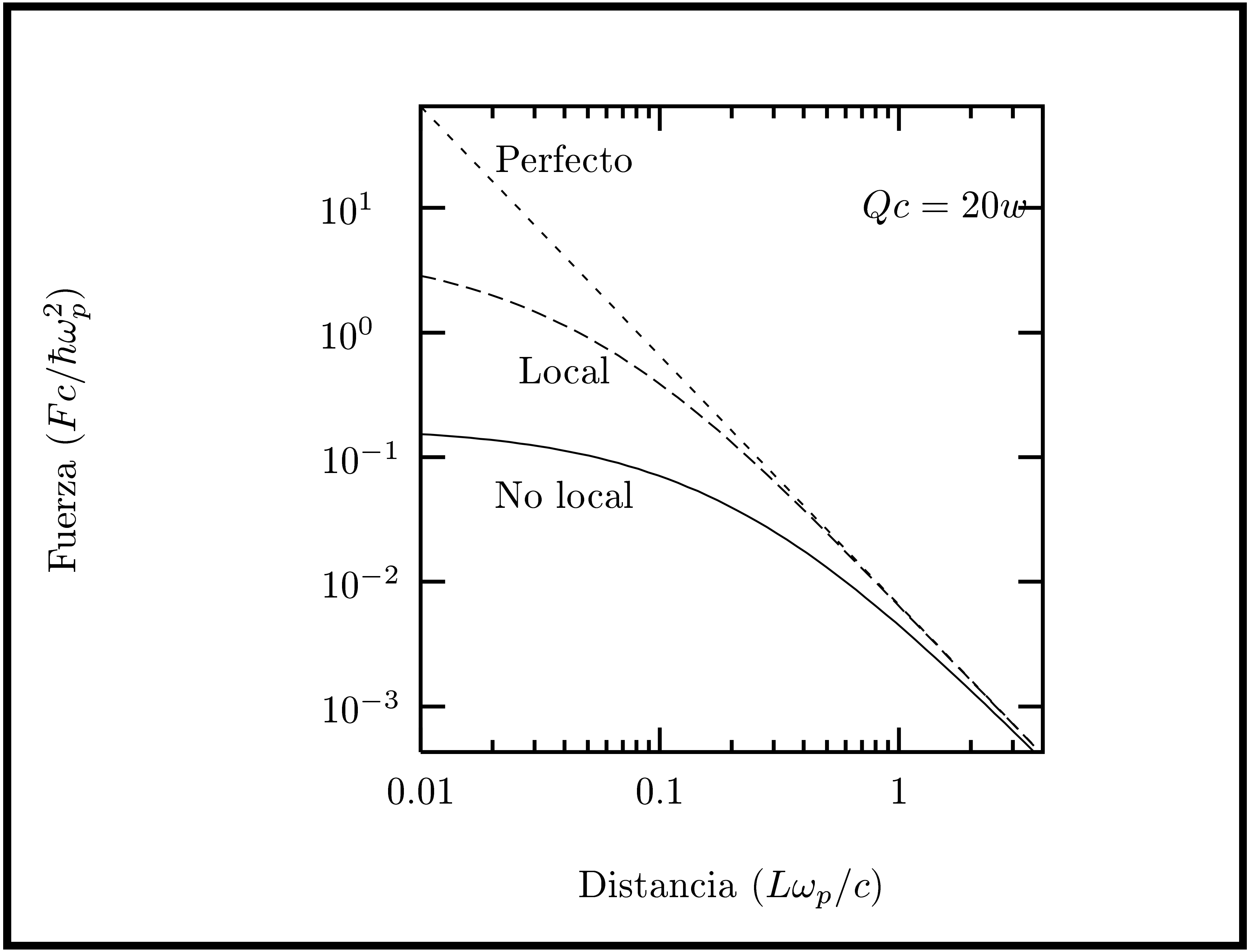

10000
1000
100
10
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
1e-05
1e-06
1e-07
0.01
0.1
1
10
100
$F_P c/\hbar\omega_p^2$
Distancia $(L\omega_p/c)$
$Qc = 100w$
$Qc = 0$


10
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
1e-05
1e-06
1e-07
0.01
0.1
1
10
100
$Qc = w$
$Qc = 10w$
$Qc = 0$
$Qc = 100w$
$F_L c/\hbar\omega_p^2$
Distancia ($L\omega_p/c$)


10^0
10^{-3}
10^{-6}
$F_N/\hbar\omega_p^2$
$Qc = 10w$
$Qc = w$
$Qc = 0$
$Qc = 100w$
0.01
0.1
1
10
100
Distancia $(L\omega_p/c)$



1.5
1.4
1.3
1.2
1
F_L/F_N
$Qc = 100w$
$Qc = w$
0.01
0.05
0.10
0.50
1.00
Distancia $(L\omega_p/c)$


Perfecto
$Qc = 20w$
Local
No local
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
0.01
0.1
1
Fuerza $(Fc/\hbar\omega_p^2)$
Distancia $(L\omega_p/c)$

Conclusiones

- La transparencia arriba de ω_p disminuye la fuerza (local vs. perfecto).
- La propagación de plasmones la disminuye aún más (no local vs. local).
- Las correcciones no locales pueden ser apreciables a distancias pequeñas y para vectores de onda grandes.